ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ RICCATI-ЕВИХ ЈЕДНАЧИНА КОЈЕ СУ ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ЈЕДНУ СМЕНУ ФУНКЦИЈЕ

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ RICCATI-ЕВИХ ЈЕДНАЧИНА КОЈЕ СУ ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ЈЕДНУ СМЕНУ ФУНКЦИЈЕ

Глава прва

1. Посматрајмо Riccati-еву једначину каноничког облика

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x) \tag{1}$$

и извршимо у њој смену функције

$$y = \frac{Qz}{z+1} \tag{2}$$

$$[Q = Q(x) \neq 0]$$

остављајући исту независно-променљиву x.

Једначина (1) тада добија облик

$$\frac{dz}{ax} = A(x) z^2 + B(x) z + C(x), \tag{3}$$

где коефицијенти A, B, C имају вредности[1])

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\Phi - Q' - Q^2}{Q}, \\ B(x) &= \frac{2\Phi - Q'}{Q}, \\ C(x) &= \frac{\Phi}{Q}. \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1]) Претпоставља се да функција $Q(x)$ није једно партикуларно решење једначине (1), тј. да је

$$\Phi - Q' - Q^2 \neq 0.$$

Нова смена функције

$$z = -\frac{1}{A} y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2} + \frac{B}{A}\right) \tag{5}$$

своди једначину (3) поново на канонички облик[1])

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi_1(x), \tag{6}$$

где је

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{4} B^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{1}{2} B' \tag{7}$$

$$+\frac{1}{2} B \frac{A'}{A} - \frac{1}{2} \frac{A''}{A} - AC.$$

На основу образаца (4), место релација (5) и (7), може се написати[2]):

$$z = -\frac{Q}{\Phi - Q' - Q^2} y_1 \tag{8}$$

$$+\frac{QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2}{2(\Phi - Q' - Q^2)^2},$$

$$\Phi_1(x) = \Phi + \frac{Q'' - \Phi'}{Q} \tag{9}$$

$$+\frac{3}{4} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2}$$

$$+\frac{\Phi - Q'}{Q} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}.$$

---

[1]) Детаљније о овим трансформацијама *видети:*

Д. С. Митриновић, *Неколико ставова о* Riccati-*евој диференцијалној једначини* (*Глас Српске академије наука*, књига 181, 1939, стр. 171—236. Нарочито *видети* стр. 187—188).

[2]) Напред је већ претпостављено да је

$$\Phi - Q' - Q^2 \neq 0,$$

јер иначе формуле (8), (9) и (10) не би имале смисла.

Трансформације (2) и (8) могу се скупити у једну: тј. релација

$$y_1 = \frac{(\Phi - Q' - Q^2)\, y}{Q\,(y - Q)} \tag{10}$$
$$+ \frac{QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2}{2Q\,(\Phi - Q' - Q^2)}$$

везује интеграле y и y_1 Riccati-евих једначина (1) и (6) које су дате у каноничком облику.

Ако је y опште решење диференцијалне једначине (1), тада је функција y_1, која је дефинисана формулом (10), опште решење једначине (6).

Напомена. Полазећи од идентитета:

$$-(QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2)$$
$$\equiv Q\,(\Phi - Q' - Q^2)' + 2\,(\Phi - Q')\,(\Phi - Q' - Q^2),$$

релација (10) може се овако написати:

$$y_1 = \frac{(\Phi - Q' - Q^2)\, y}{Q\,(y - Q)} \tag{11}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{\Phi - Q'}{Q}.$$

Из последње релације излази:

$$y = \frac{\alpha\, y_1 + \beta}{\gamma\, y_1 + \delta}, \tag{12}$$

где је

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2Q\,(\Phi - Q' - Q^2),\\ \beta &= Q\,(\Phi - Q' - Q^2)' + 2\,(\Phi - Q')\,(\Phi - Q' - Q^2),\\ \gamma &= 2\,(\Phi - Q' - Q^2),\\ \delta &= (\Phi - Q' - Q^2)' + 2Q\,(\Phi - Q' - Q^2). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

2. Трансформацијом (12) може се прећи са једначине (1) на једначину (6). Обрнуто, трансформацијом (11) прелази се са једначине (6) на једначину (1). Трансформација (12), у којој су коефицијенти

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

дефинисани формулама (13), има особину да задржава облик једначине (1), тј. посматрана трансформација претвара канонички облик Riccati-еве једначине поново у канонички облик.

Поставимо сада проблем о одређивању Riccati-евих *једначина каноничког облика које се претварају у себе саме сменом функције* (10), *тј. које у односу на посматрину смену* (10) *остају* **инваријантне**[1]).

Условна једначина овог проблема је:

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \tag{14}$$

и тада једначине (1) и (6) постају

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x),$$

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi(x)$$

и разликују се једна од друге само нотацијом непознате функције: у једној је непозната функција означена са y, а у другој са y_1.

Јасно је да је овде:

$$y_1 = y. \tag{15}$$

Услов (14), према обрасцу (9), постаје:

$$\frac{Q'' - \Phi'}{Q} + \frac{3}{4}\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2} \tag{16}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{\Phi - Q'}{Q}\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} = 0.$$

---

[1]) P. Appell у расправи *Sur des équations différentielles linéaires transformalles en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable* (*Acta mathematica*, t. 15, 1891, p. 281—315; *видети* нарочито стр. 283 и стр. 315) дефинише појам трансформовања диференцијалних једначина у себе саме за једну смену функције и независно-променљиве.

Видети такође:

1° A. Buhl, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, t. I, deuxième édition Paris, 1944, p. 132.

Овде Buhl дефинише појам о инваријантности једне диференцијалне једначине за дату трансформацију променљивих и наводи као пример D'Alembert-ову парцијалну једначину II реда

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (c = \text{const})$$

која је инваријантна, тј. претвара се у себе саму, за Lorentz-ову трансформацију независно променљивих. Овај факат игра значајну улогу у Математичкој физици.

2° D. S. Mitrinovitch, *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformalle en elle-même.* (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 228, 1949, p. 1188—1190).

Диференцијална једначина (16) спада у тип једначина

$$F(\Phi, \Phi', \Phi''; Q, Q', Q'', Q''') = 0.$$

Према томе, једначина (16) је неодређена диференцијална једначина са две непознате функције

$$\Phi(x), \quad Q(x),$$

али у којој не фигурише експлицитно независно променљива x.

Поставићемо ова два проблема:

Први проблем: *Дата је функција* $Q(x)$ *коју ћемо звати карактеристична функција придружена* Riccati-евој *једначини; наћи функцију* $\Phi(x)$ *која је дефинисана диференцијалном једначином* (16);

Други проблем: *Дата је функција* $\Phi(x)$; *одредити карактеристичну функцију* $Q(x)$ *која је дефинисана једначином* (16).

3. Када је дата карактеристична функција $Q(x)$, једначина (16) спада у тип диференцијалних једначина облика

$$G(x, \Phi, \Phi', \Phi'') = 0.$$

Могло би се помислити да стварно одређивање функције $\Phi(x)$ поставља веће тешкоће него сама интеграција полазне једначине (1). Али, у ствари, није такав случај и то ћемо одмах показати.

Уведимо ознаку

$$\Phi - Q' - Q^2 = t, \tag{17}$$

одакле излази:

$$(\Phi - Q' - Q^2)' = \frac{dt}{dx} = t',$$

$$(\Phi - Q' - Q^2)'' = \frac{d^2t}{dx^2} = t'',$$

$$\Phi' - Q'' = t' + 2\,QQ'.$$

Једначина (16), водећи рачуна о релацији (17), постаје

$$2\,Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{t''}{t} - Q\,\frac{t'}{t} = 0. \tag{18}$$

Уведимо сада нову функцију η помоћу формуле

$$t = e^{\int \eta\, dx}. \tag{19}$$

Диференцијална једначина (18) добија тада вид

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{2}\eta^2 - 2Q\eta + 4Q' = 0. \tag{20}$$

Последња једначина припада класи Riccati-евих једначина.

Испитивањем ове једначине закључује се: да је функција

$$\eta = -4Q$$

једно партикуларно решење једначине (20).

На основу овог резултата одређује се *опште решење* једначине (20) у облику:

$$\eta = -4Q + \frac{2e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \tag{21}$$

где је K интеграциона константа.

Полазећи од релације (19), t се добија помоћу формуле

$$t = exp \int \eta\, dx \tag{22}$$

$$= exp\left\{\int -4Q\,dx + \int \frac{2e^{-2\int Q\,dx}\,dx}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}\right\}.$$

Пошто је

$$\int \frac{2e^{-2\int Q\,dx}\,dx}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx} = -2\,ln\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right) + \text{Const},$$

за t налазимо

$$t = \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}, \tag{23}$$

где је K_1 нова интеграциона константа.

Према релацији (17), функција $\Phi(x)$ има облик

$$\Phi(x) = Q' + Q^2 + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}. \tag{24}$$

Први од проблема формулисаних у § 2 *ове расправе решен је обрасцем* (24).

4. Као последица услова (14), чији је развијен облик дат релацијом (16), добија се

$$y_1 = y. \tag{25}$$

Решења једначина (1) и (6) везана су релацијом (10), која с обзиром на услов (25) постаје

$$\begin{aligned} & 2\,(\Phi - Q' - Q^2)\,y^2 + (\Phi' - Q'' - 2\,QQ')\,y \\ & + (QQ'' - Q\Phi' + 2\,Q^2\Phi - 2\,Q'^2 + 4\,Q'\,\Phi - 2\,\Phi^2) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ако се у једначину (26) унесе вредност за Φ дефинисана обрасцем (24) и тако формирана једначина реши по y, добија се, после заметних израчунавања:

$$\begin{aligned} y_I &= Q - \frac{\omega_1 e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \\ y_{II} &= Q - \frac{\omega_2 e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \end{aligned} \tag{27}$$

где су ω_1 и ω_2 корени једначине

$$\omega^2 - \omega - K_1 = 0$$

решене по ω.

5. Напред добијени резултати могу се овако резимирати:

Став. Riccati-ева *диференцијална једначина*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = Q' + Q^2 + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}$$

$$[Q = Q\,(x), \quad K = \text{Const}, \quad K_1 = \text{Const}]$$

трансформује се у себе саму сменом функције

$$y = Q + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2} \cdot \frac{1}{y_1 - Q + \dfrac{e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}},$$

где је y_1 *нова непозната функција.*

Уочена диференцијална једначина је интеграбилна, јер су позната два њена партикуларна решења (27).

6. Да би формуле биле једноставније, место произвољне функције Q увешћемо другу функцију од x. Ставимо

$$Q(x) = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

где је

$$\lambda = \lambda(x), \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dx}.$$

Будући да је тада

$$exp\left(-2\int Q\,dx\right) = \frac{1}{\lambda^2},$$

има се

$$\Phi(x) = \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{K_1}{\lambda^4\left(K - \int \frac{dx}{\lambda^2}\right)^2}.$$

У изразу за функцију Φ фигурише сада само једна квадратура.

Место функције $\lambda(x)$ уведимо нову функцију $\mu(x)$ помоћу формуле

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mu',$$

тј.

$$\lambda = (\mu')^{-\frac{1}{2}},$$

одакле следује:

$$\lambda' = -\frac{1}{2}(\mu')^{-\frac{3}{2}}\mu'',$$

$$\lambda'' = \frac{3}{4}(\mu')^{-\frac{5}{2}}(\mu'')^2 - \frac{1}{2}(\mu')^{-\frac{3}{2}}\mu''',$$

$$\frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'}.$$

Према томе, за Φ налазимо:

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1\mu'^2}{(K-\mu)^2}.$$

Партикуларна решења (27) имају сада облик:

$$
\begin{aligned}
y_I &= -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} - \omega_1 \frac{\mu'}{K-\mu},\\
y_{II} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} - \omega_2 \frac{\mu'}{K-\mu},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где су ω_1 и ω_2 решења једначине

$$\omega^2 - \omega - K_1 = 0.$$

На основу изложеног став, наведен у § 5, може се формулисати и на следећи начин:

Диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1 \mu'^2}{(K-\mu)^2}, \tag{29}$$

где су: μ ма каква функција променљиве x, а K и K_1 ма какве константе, *инваријантна је у односу на трансформацију функције*

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} + K_1\left(\frac{\mu'}{K-\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} + \frac{\mu'}{K-\mu}}, \tag{30}$$

где је y_1 нова функција.

На крају, ако се стави

$$
\begin{aligned}
K - \mu &= \theta(x),\\
K_1 &= \alpha = \text{Const},
\end{aligned}
$$

релације (28), (29) и (30) имају респективно ове облике:

$$
\begin{aligned}
y_I &= -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \omega_1 \frac{\theta'}{\theta},\\
y_{II} &= -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \omega_2 \frac{\theta'}{\theta};
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2; \tag{32}$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}}, \tag{33}$$

где су ω_1 и ω_2 корени једначине

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

Из претходног се види да смо у релацијама (28), (29), (30), могли узети да је

$$K=0,$$

а да тиме не умањимо генералност резултата.

7. Напред изложене чињенице омогућавају да се формулише овај.

Став. Riccati-ева *диференцијална једначина*

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \tag{34}$$

$$(\alpha=\mathrm{Const}\neq 0)$$

трансформује се у себе саму сменом функције

$$y=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\frac{1}{y_1+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{\theta'}{\theta}},$$

тј. *посматрана једначина остаје инваријантна и има облик*

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2.$$

θ је произвољна функција променљиве x, али се претпоставља[1]):

1° непрекидност функције θ у једном посматраном интервалу променљиве x;

2° егзистенција извода, који се појављују у формулама, и то у истом интервалу променљиве x;

3° $\theta(x)\neq\mathrm{Const}$.

Узевши у обзир партикуларна решења (31), опште решење једначине (34), у случају када је $\alpha\neq-\frac{1}{4}$, гласи:

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=Me^{\int(\omega_2-\omega_1)\frac{\theta'}{\theta}dx}$$

[1]) На аналогичан начин напред је прећутно претпостављена: непрекидност функција

$$Q(x),\quad \lambda(x),\quad \mu(x)$$

и егзистенција њихових извода у интервалу непрекидности. Овим условима треба додати један допунски услов сличан ономе горе под 3° за функцију $\theta(x)$.

тј.

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=M\theta^{\omega_2-\omega_1}$$

(M = произвољна интеграциона константа).

Будући да су ω_1 и ω_2 решења једначине

$$\omega^2-\omega-\alpha=0,$$

можемо ставити

$$|\omega_1-\omega_2|=\sqrt{1+4\alpha}.$$

Карактеристична функција $Q(x)$ коју смо увели у § 2 изражава се, помоћу функције $\theta(x)$, према формули

$$Q(x)=\frac{\lambda'}{\lambda}=-\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'}=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}.$$

Горе наведени став потпуно решава први проблем постављен у § 2, *јер је нађена најопштија функција* $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2$$

која одговара произвољној карактеристичној функцији

$$Q(x) \quad \text{односно} \quad -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}, \qquad \theta=\theta(x).$$

8. Поставља се сада питање које је већ формулисано у § 2 (други проблем), да се за дато $\Phi(x)$ нађе $Q(x)$ дефинисано једначином (16). По Q једначина (16) претставља диференцијалну једначину трећег реда.

Ако бисмо успели да решимо тај проблем, значило би да смо полазећи од дате Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\Phi(x) \tag{35}$$

(Φ = дата функција променљиве x),

нашли Q, тј. смену

$$y=Q+\frac{\Phi-Q'-Q^2}{y_1+\frac{1}{2}[ln(\Phi-Q'-Q^2)]'+Q}$$

која једначину (35) претвара у једначину

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi(x),$$

тј. трансформује је у себе саму.

Наравно, да тај проблем не можемо решити с обзиром на познати Liouville-ов став.

У ствари, овде је проблем интеграције Riccati-еве једначине сведен на изналажење партикуларних решења једначине (16), где је $\Phi(x)$ дата функција.

Глава друга

9. У претходној глави у једначини

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x) \tag{36}$$

извршили смо смену функције

$$y = \frac{Q(x)\,z}{z+1}. \tag{37}$$

Сада ћемо поћи од смене функције општијег облика

$$y = \frac{Qz+R}{z+T}, \tag{38}$$

где је z нова непозната функција и где су

$$Q, \; R, \; T$$

функције од x такве да је

$$QT - R \neq 0.$$

Диференцијална једначина (36), када се на функцији y изврши билинеарна трансформација (38), добија облик

$$\frac{dz}{dx} = A(x)\,z^2 + B(x)\,z + C(x), \tag{39}$$

где су коефицијенти A, B, C дефинисани обрасцима:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\Phi - Q' - Q^2}{QT-R}, \\ B(x) &= \frac{2T\Phi - 2QR + QT' - Q'T - R'}{QT-R}, \\ C(x) &= \frac{T^2\Phi - R^2 + RT' - R'T}{QT-R}. \end{aligned} \tag{40}$$

Riccati-ева једначина (39), ако се на функцији z изврши линеарна трансформација

$$z = -\frac{1}{A} y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2} + \frac{B}{A}\right), \tag{41}$$

добија поново канонички облик

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi_1(x), \tag{42}$$

где је

$$\Phi_1(x) = \frac{(T\Phi - QR + QT' - R')(T\Phi - QR - Q'T)}{(QT - R)^2} \tag{43}$$

$$- \frac{(\Phi - Q' - Q^2)(T^2\Phi - R^2 + RT' - R'T)}{(QT - R)^2}$$

$$+ \frac{Q''T + Q'T' - (T\Phi)' + (QR)'}{QT - R}$$

$$+ \frac{T\Phi - QR - Q'T}{QT - R} \cdot \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}$$

$$+ \frac{3}{4}\left[\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}\right]^2$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2}.$$

10. Потражимо услов да би једначина (36) остала *инваријантна* када се на функцији y изврши билинеарна трансформација (38), у којој је z дефинисано формулом (41), где су коефицијенти

$$A(x), \quad B(x)$$

дати формулама (40).

Тражени услов јесте једначина (43) у којој још место $\Phi_1(x)$ треба ставити $\Phi(x)$.

Из једначине (43), где је стављено

$$\Phi_1 = \Phi,$$

после извршења простих али заметних трансформација[1]) добија се једначина доста једноставног облика

$$Q\,(\Phi' - Q'') - 2Q'\,(\Phi - Q') \tag{44}$$
$$+\frac{3}{4}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{\Phi - Q' - Q^2}$$
$$-\frac{1}{2}\,(\Phi - Q' - Q^2)'' = 0.$$

Као што се види, функције R и T уопште се не појављују у једначини (44). Стога неће бити умањена генералност резултата коме се тежи, ако се стави

$1^0 \quad R=0, \qquad T=1, \qquad Q \neq 0;$

или

$2^0 \quad R=1, \qquad T=0.$

У обадва случаја задовољен је услов

$$QT - R \neq 0$$

под којим су изведене претходне трансформације.

Први од наведених случајева већ смо имали у првој глави ове расправе. Други случај допушта и могућност

$$Q=0.$$

11. Ако се, као у претходној глави, стави

$$\Phi - Q' - Q^2 = t,$$

[1]) Коефицијенти уз R' и T' идентички се анулирају. Коефицијент уз T^2 је

$$\frac{Q^2}{\Lambda}\,[Q\,(\Phi' - Q'') - 2\,Q'\,(\Phi - Q')],$$

где је

$$\Lambda = (QT - R)^2\,(\Phi - Q' - Q^2).$$

Коефицијент уз RT јесте израз:

$$\frac{-2Q}{\Lambda}\,[Q\,(\Phi' - Q'') - 2\,Q'\,(\Phi - Q')].$$

Коефицијент уз R^2 је облика

$$\frac{1}{\Lambda}\,[Q\,(\Phi' - Q'') - 2\,Q'\,(\Phi - Q')].$$

Тако једначина (43), праћена условом

$$\Phi_1 = \Phi,$$

диференцијална једначина (44) постаје

$$2Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{t''}{t} - Q\,\frac{t'}{t} = 0,$$

а та једначина идентична је једначини (18).

Уосталом, једначини (16) може се дати облик (44) под претпоставком да је

$$Q \neq 0.$$

У једначини (16) извршимо ову трансформацију:

Израз

$$\frac{Q'' - \Phi'}{Q} + \frac{\Phi - Q'}{Q}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}$$

постаје

$$\frac{-2QQ'(\Phi - Q') - Q^2(Q'' - \Phi')}{Q(\Phi - Q' - Q^2)}.$$

Ако је $Q \neq 0$, има се:

$$\frac{Q'' - \Phi'}{Q} + \frac{\Phi - Q'}{Q}\cdot\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} \tag{45}$$

$$\equiv \frac{Q(\Phi' - Q'') - 2Q(\Phi - Q')}{\Phi - Q' - Q^2}.$$

Релација (44) може се написати на следећи начин:

$$\frac{Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q')}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{3}{4}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2} \tag{46}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2} = 0.$$

узима облик

$$\frac{1}{\Lambda}[Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q')](QT - R)^2$$

$$+\frac{3}{4}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2} = 0.$$

Пошто је

$$QT - R \neq 0,$$

последња једначина се своди на (44).

Ако се узме у обзир идентитет (45), закључује се да су услови (16) и (44) односио (46) еквивалентни ако је $Q \neq 0$.

У случају ако је $Q=0$, тада расматрања у првој глави не важе. Услов (44) за $Q=0$, постаје

$$2\Phi\Phi'' - 3\Phi'^2 = 0,$$

а то је случај који је проучавао М. Куренский[1]); на томе случају нећемо се задржавати.

12. У једној новој расправи проучаћемо, на општији начин, питање о инваријантности Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x)$$

за трансформацију облика

$$y = \frac{Q(x)\,z + R(x)}{S(x)\,z + T(x)}$$

$$(QT - RS \neq 0)$$

и показаћемо исто тако да се проблем из ове расправе може довести у везу са појмом *групе трансформација* и са општом теоријом инваријаната диференцијалних једначина.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ, ПРЕОБРАЗУЕМЫХ В САМИХ СЕБЯ

(*Вывод*)

В этой статье, между прочим, доказываем следующую теорему:

Уравнение Риккати

$$(R) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2$$

$$(\alpha = \text{const} \neq 0)$$

---

[1]) M. Kourensky, *Sur l'équation de Riccati* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie sesta, vol. 9, 1929, p. 956—957).

преображается в само себя подстановкой функции

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}},$$

где $\theta(x)$ произвольная функция от x $[\theta(x) \neq \text{const}]$, непрерывная и имеющая три первые производные.

Общее решение уравнения (R) дано реляцией $\left(\alpha \neq -\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_1 \frac{\theta'}{\theta}}{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_2 \frac{\theta'}{\theta}} = M\theta^{\omega_2 - \omega_1}$$

где:

M = произвольное постоянное,

ω_1, ω_2 = корни уравнения

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE RICCATI INVARIANTES RELATIVEMENT À UN CHANGEMENT DE FONCTION

(*Résumé*)

1. On considère l'équation différentielle de Riccati sous la forme canonique

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x), \tag{1}$$

et l'on effectue sur la fonction inconnue y la substitution bilinéaire[1])

$$y = Q + \frac{2(\Phi - Q' - Q^2)^2}{2(\Phi - Q' - Q^2)(y_1 + Q) + (\Phi - Q' - Q^2)'}, \tag{2}$$

où[2]):

1⁰ Q $[Q \neq 0$, Q n'est pas une solution de l'équation (1)] signifie une fonction arbitraire de x, continue et dérivable;

2⁰ y_1 est une nouvelle fonction inconnue.

L'équation de Riccati (1) se transforme alors en

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi_1(x), \tag{3}$$

---

1) *Voir:*
D. S. Mitrinovitch, *Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati (Bulletin de l'Académie serbe des sciences*, série A, t. 6. 1939, p. 132 - 135).

2) Dans cette étude, les accents marquent des dérivées prises par rapport à la variable x.

avec

$$\Phi_1(x)=\Phi+\frac{Q''-\Phi'}{Q} \tag{4}$$

$$+\frac{3}{4}\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'^2}{(\Phi-Q'-Q^2)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(\Phi-Q'-Q^2)''}{\Phi-Q'-Q^2}$$

$$+\frac{\Phi-Q'}{Q}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'}{\Phi-Q'-Q^2}.$$

De la relation (2) il s'ensuit que

$$y_1=\frac{(\Phi-Q'-Q^2)\,y}{Q\,(y-Q)} \tag{5}$$

$$+\frac{QQ''-Q\Phi'+2\,Q^2\Phi-2\,Q'^2+4\,Q'\Phi-2\,\Phi^2}{2\,Q\,(\Phi-Q'-Q^2)}.$$

La relation (2), c'est-à-dire la relation (5), relie les intégrales

$$y\,(x) \quad \text{et} \quad y_1\,(x)$$

des équations de Riccati respectives (1) et (3), données sous la forme canonique.

La transformation (5) a donc pour effet de conserver la forme de l'équation (1): en fait, il existe des transformations changeant des formes déjà canoniques en d'autres formes canoniques.

II. On propose le problème de déterminer des équations de Riccati se transformant en elles-mêmes par le changement de fonction (5). En d'autres termes, on cherche des équations de Riccati qui restent invariantes relativement à la transformation (5).

Si l'on compare l'équation (1) avec (3), on fournit la relation

$$\Phi\,(x)=\Phi_1\,(x) \tag{ }$$

comme l'équation du problème proposé.

La condition (6) étant satisfaite, il s'ensuit que

$$y_1=y. \tag{7}$$

La relation (6), d'après (4), prend la forme

$$\frac{Q''-\Phi'}{Q}+\frac{3}{4}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'^2}{(\Phi-Q'-Q^2)^2} \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)''}{\Phi-Q'-Q^2}+\frac{\Phi-Q'}{Q}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'}{\Phi-Q'-Q^2}=0.$$

L'équation (8) rentre dans le type d'équations de la forme

$$F\,(\Phi,\,\Phi',\,\Phi'';\;Q,\,Q',\,Q'',\,Q''')=0,$$

donc c'est une équation différentielle indéterminée à deux fonctions inconnues Φ et Q, mais dans laquelle ne figure pas explicitement la variable indépendante x.

On peut proposer ces deux questions:

1° On donne la fonction $Q(x)$ qui sera nommée: *fonction caractéristique* associée à l équation de Riccati (1); il faut trouver la fonction $\Phi(x)$, définie par l'équation (8), qui est en Φ du second ordre;

2° On donne la fonction $\Phi(x)$; il faut trouver la fonction caractéristique $Q(x)$, définie à l'aide de l'équation (8) qui est en Q du troisième ordre.[1])

III. Pour résoudre la première question, posons

$$\Phi - Q' - Q^2 = t \tag{9}$$

dans (8); on obtient

$$2Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{t''}{t} - Q\frac{t'}{t} = 0. \tag{10}$$

Par la nouvelle substitution

$$t = e^{\int \eta \, dx} \tag{11}$$

(η = une nouvelle fonction),

l'équation (10) se transforme en

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{2}\eta^2 - 2Q\eta + 4Q' = 0. \tag{12}$$

En analysant l'équation (12), on constate le fait important que la dernière équation admet comme intégrale particulière la fonction

$$\eta_1 = -4Q.$$

La solution générale de l'équation de Riccati (12) est:

$$\eta = -4Q + \frac{2e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int exp(-2\int Q\,dx)\,dx}, \tag{13}$$

où K désigne une constante d'intégration.

Si l'on effectue les calculs exigeant les formules (11) et (9), on fournit

$$\Phi(x) = Q' + Q^2 + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left[K - \int exp(-2\int Q dx)\,dx\right]^2} \tag{14}$$

K_1 étant une nouvelle constante arbitraire.

En profitant de la forme arbitraire de la fonction $Q(x)$, on peut faire disparaître dans la relation (14) le signe de quadrature, en laissant,

1) Dans ce résumé, on se contente de traiter la première question. Dans la même étude, écrite en serbe, on indique quelques remarques sur la seconde question.

toutefois, toute la généralité à la fonction $Q(x)$. Pour effectuer ceci, posons tout d'abord

$$Q = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

$\lambda \neq 0$ étant une fonction arbitraire de x.

La fonction $\Phi(x)$, définie par (14), prend alors la forme

$$\Phi(x) = \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{K_1}{\lambda^4 \left(K - \int \lambda^{-2} dx\right)^2} \tag{15}$$

Si l'on introduit une nouvelle fonction arbitraire $\mu(x)$, à l'aide de la relation

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mu',$$

la fonction Φ obtient la forme

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1 \mu'^2}{(K-\mu)^2}. \tag{16}$$

Si l'on pose enfin

$$K - \mu = \theta(x), \quad K_1 = \alpha, \quad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

la fonction Φ, en vertu de (16), prend la forme définitive:

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2.$$

Les faits mentionnés plus haut donnent la possibilité d'énoncer le résultat suivant qui est la réponse à la première des questions proposées précédemment:

Proposition. *L'équation de* Riccati

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \tag{17}$$

$$(\alpha = \text{Const} \neq 0)$$

se transforme en elle-même par le changement de fonction

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}},$$

où $\theta(x) \neq \text{const}$ *désigne une fonction arbitraire de x, continue et possédant les trois premières dérivées.*

La solution générale de l'équation (17), dans le cas où $\alpha \neq -\frac{1}{4}$, est

$$\frac{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_1 \frac{\theta'}{\theta}}{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_2 \frac{\theta'}{\theta}} = M\theta^{\omega_2 - \omega_1}$$

avec

M = constante d'intégration;

ω_1, ω_2 = les racines de l'équation

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

IV. En proposant de résoudre le même problème pour l'équation (1), en partant de la transformation bilinéaire plus générale que (2), on trouve les résultats identiques à ceux déjà fournis dans cette étude.